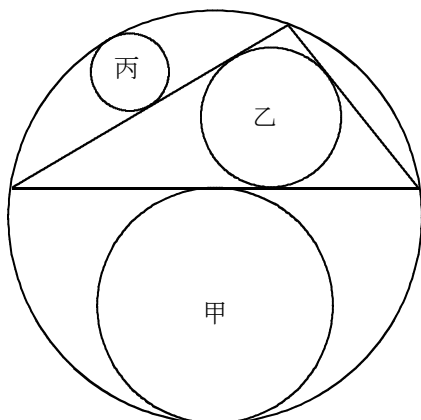


大国魂神社の算額（下段第5問）についての考察

永井信一

1. この算額について

所在地 府中市宮町 大国魂神社 宝物殿
 年代 明治18年（1885）
 奉納者 小俣勇門人36名
 形状 121cm × 222cm 36間（3段 × 12間）



<問題（36問のうち下段第5問）>

左の図のように，外円内に三角形，甲円，乙円，丙円をかく。甲円の直径が49寸，乙円の直径が28寸，丙円の直径が17寸のとき，外円の直径を求めよ。

<術文より>

甲 × 丙 × 8 = 乾， 乾 × 2 - 乙² = 坤 とする。

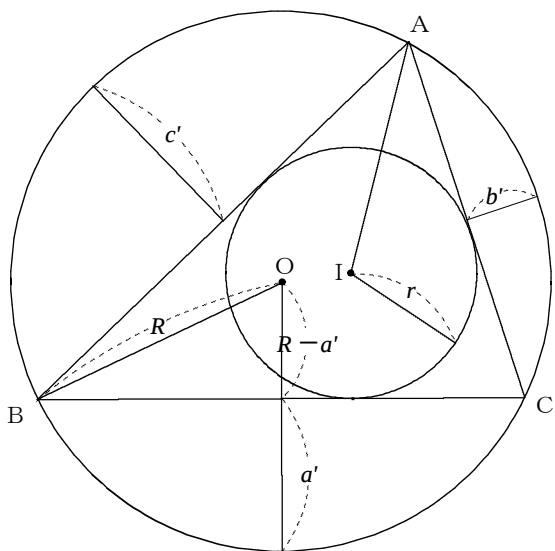
$$\frac{\{(甲+丙) \times 2 + 乙\} \times 乾}{坤} = 外$$

により，答は85寸



★同一の問題が村山市楯岡の最上徳内記念館の復元算額にある。
 これは天明4年(1784)に最上徳内が芝愛宕山に奉納したものを
 平成5年に『続神壁算法』(藤田嘉言)より復元したものである。

2. 問題を解くための準備



△ABCの外接円の半径をR，内接円の半径をr，
 各辺の中点から外接円までの距離(これを矢とい
 う)をそれぞれa', b', c'とする。

このときに成り立つ関係式をいくつか証明する。

- ① $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- ② $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$
- ③ $a' + b' + c' = 2R - r$
- ④ $2a'b'c' = r^2 R$

【①の証明】

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc}{2}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad \text{ただし, } s = \frac{a+b+c}{2}$$

同様にして，

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\text{また, } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{ヘロンの公式}), \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = rs$$

よって，

$$4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 4R \times \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{4R}{abc} \times \frac{S^2}{s} = \frac{1}{S} \times \frac{S^2}{s} = \frac{S}{s} = r$$

【②の証明】

$$\begin{aligned}
 \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\
 &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \\
 &= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\
 &= 1 + \frac{r}{R} \quad (\text{①より})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A + B + C &= 180^\circ \text{ より,} \\
 \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} &= 90^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{よって,} \\
 \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{A+B}{2}
 \end{aligned}$$

【③の証明】

$$\cos A = \frac{R-a'}{R}, \quad \cos B = \frac{R-b'}{R}, \quad \cos C = \frac{R-c'}{R} \quad \text{を②に代入すると}$$

$$\frac{R-a'}{R} + \frac{R-b'}{R} + \frac{R-c'}{R} = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\begin{aligned}
 R - a' + R - b' + R - c' &= R + r \\
 \text{よって,} \\
 a' + b' + c' &= 2R - r
 \end{aligned}$$

【④の証明】

$$a' = R(1 - \cos A) = 2R \sin^2 \frac{A}{2} \quad \text{同様にして,} \quad b' = 2R \sin^2 \frac{B}{2}, \quad c' = 2R \sin^2 \frac{C}{2}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 2a'b'c' &= 16R^3 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= \left(4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)^2 \times R \\
 &= r^2 R \quad (\text{①より})
 \end{aligned}$$

3. 問題の解法

算額の図と2の図を比較すると, 甲 $=a'=49$ 寸, 乙 $=2r=28$ 寸, 丙 $=c'=17$ 寸のとき, 外 $=2R$ を求めればよいことになる。

$$\text{③より, } b' = 2R - r - a' - c'$$

これを④に代入すると,

$$\begin{aligned}
 2a'(2R - r - a' - c')c' &= r^2 R \\
 R(4a'c' - r^2) &= 2a'c'(a' + c' + r)
 \end{aligned}$$

$$2R = \frac{4a'c'(a' + c' + r)}{4a'c' - r^2} \quad \text{したがって, } 2R = 85 \text{ 寸}$$

乙 $=2r$ なので, $2r$ をつくるためにこの式の分子と分母に4をかけると,

術文にある $\frac{\{(甲+丙) \times 2 + 乙\} \times 乾}{坤} = \text{外}$ と同じ形になる。