

アルベロスに関連した問題

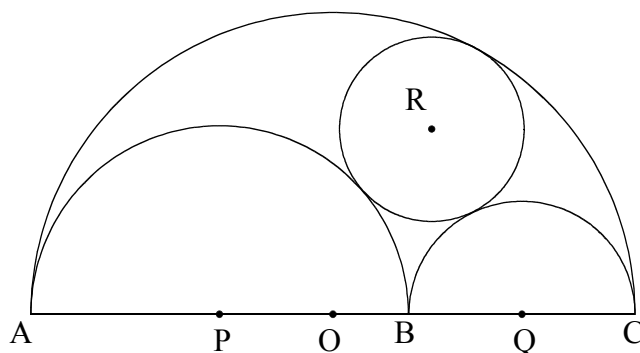
柏葉中学校
永井信一

1. まえがき

昨年、「アルベロス 3つの半円がつくる幾何宇宙」奥村 博・渡邊将之 岩波書店が出版された。アルベロスという1つの問題に絞った本として大変珍しいものである。私自身、算額の問題を解くために、反転の手法を学んでいる最中なので興味深く読んだ。この本では反転や和算についても記載があるが、アルキメデスの円の話が中心なので方向性はやや異なる。今回は昨年の早数教分科会レポート「和算と反転法について」の第2弾として最近まとめたものを発表する。

2. 高校入試問題より

半円 O、P、Q の半径はそれぞれ 5、3、2 である。
これらの半円の弧と右の図のように接する円 R の半径を求めよ。



右の図のように補助線を引くと、

P、D、R は一直線上、
Q、E、R も一直線上、
O、R、F も一直線上にある。

R より AC に下した垂線の足を H とし、
 $QH = x$ とすれば、

$$PH = PB + BQ - QH = 5 - x$$

$$OH = OC - QC - QH = 3 - x$$

円 R の半径を y とすれば、

$$PR = PD + DR = 3 + y$$

$$QR = QE + ER = 2 + y$$

$$OR = OF - RF = 5 - y$$

ここで $\triangle PRH$ 、 $\triangle ORH$ 、 $\triangle QRH$ に三平方の定理を用いて、

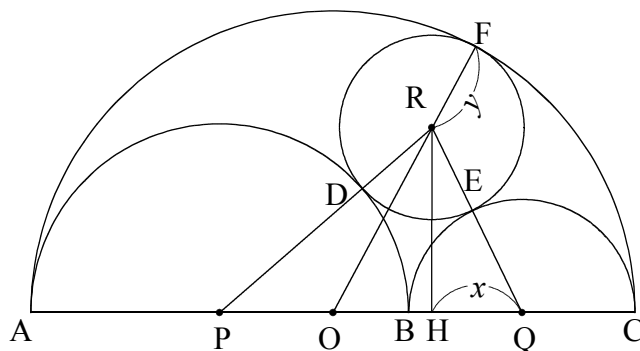
$$RH^2 = PR^2 - PH^2 = OR^2 - OH^2 = QR^2 - QH^2$$

すなわち、

$$(3+y)^2 - (5-x)^2 = (5-y)^2 - (3-x)^2 = (2+y)^2 - x^2$$

これを解いて、 $x = \frac{32}{19}$, $y = \frac{30}{19}$

答 $\frac{30}{19}$



三平方の定理の応用問題としては、標準よりやや上程度の問題である。この問題の元になったのは、もちろんアルキメデスのアルベロスである。また、江戸時代の和算でもさかんに採り上げられた問題である。

3. アルキメデスの補助定理集 (Archimedes' Book of Lemmas) より命題 6

BOOK OF LEMMAS.

307

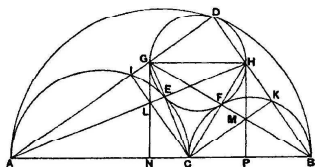
[As pointed out by an Arabian Scholiast Alkauhi, this proposition may be stated more generally. If, instead of one point C on AB , we have two points C, D , and semicircles be described on AC, BD as diameters, and if, instead of the perpendicular to AB through C , we take the radical axis of the two semicircles, then the circles described on different sides of the radical axis and each touching it as well as two of the semicircles are equal. The proof is similar and presents no difficulty.]

Proposition 6.

Let AB , the diameter of a semicircle, be divided at C so that $AC = \frac{3}{2}CB$ [or in any ratio]. Describe semicircles within the first semicircle and on AC, CB as diameters, and suppose a circle drawn touching all three semicircles. If GH be the diameter of this circle, to find the relation between GH and AB .

Let GH be that diameter of the circle which is parallel to AB , and let the circle touch the semicircles on AB, AC, CB in D, E, F respectively.

Join AG, GD and BH, HD . Then, by Prop. 1, AGD, BHD are straight lines.



For a like reason AEH, BFG are straight lines, as also are CEG, CFH .

Let AD meet the semicircle on AC in I , and let BD meet the semicircle on CB in K . Join CI, CK meeting AE, BF

20—2

$$AC = \frac{3}{2}CB \text{ であるとき、アルベロスの中に}$$

3つの半円に接するように描かれた円の直径と AB の関係を求めよ。

直径 GH を AB に平行に描き、 AB, AC, CB 上の半円の接点をそれぞれ D, E, F とする。

補助定理集の命題 1 により、 AG, GD および BH, HD は一直線になる。

さらに、 AEH, BFG, CEG, CFH も一直線になる。

AC 上の半円と AD との交点を I 、 CB 上の半円と BD との交点を K として、 CI, CK を引き、これらと AE, BF との交点をそれぞれ L, M とする。 GL, HM を延長して、 AB との交点をそれぞれ N, P とする。

$\triangle AGC$ において、 A, C から対辺への垂線が L を通るから、 GLN も AC に垂直である。同様にして、 HMP も CB に垂直である。

I, K, D の角は直角であるから、 CK と AD は平行であり、また CI と BD も平行である。

308

ARCHIMEDES

respectively in L, M , and let GL, HM produced meet AB in N, P respectively.

Now, in the triangle AGC , the perpendiculars from A, C on the opposite sides meet in L . Therefore, by the properties of triangles, GLN is perpendicular to AC .

Similarly HMP is perpendicular to CB .

Again, since the angles at I, K, D are right, CK is parallel to AD , and CI to BD .

$$\text{Therefore } AC : CB = AL : LH \\ = AN : NP,$$

$$\text{and } BC : CA = BM : MG \\ = BP : PN.$$

$$\text{Hence } AN : NP = NP : PB,$$

or AN, NP, PB are in continued proportion*.

Now, in the case where $AC = \frac{3}{2}CB$,

$$AN = \frac{2}{5}NP = \frac{2}{5}PB,$$

whence $BP : PN : NA : AB = 4 : 6 : 9 : 19$.

$$\text{Therefore } GH = NP = \frac{6}{19}AB.$$

And similarly GH can be found when $AC : CB$ is equal to any other given ratio†.

* This same property appears incidentally in Pappus (p. 226) as an intermediate step in the proof of the "ancient proposition" alluded to below.

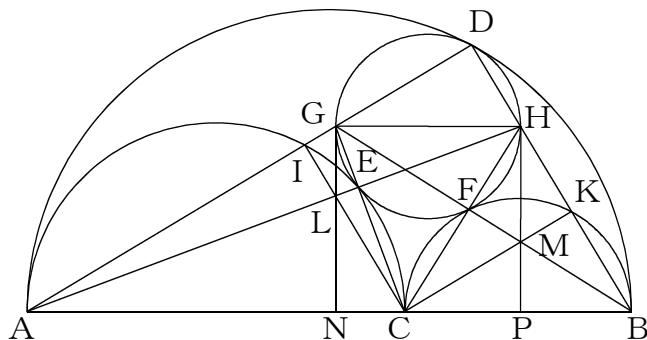
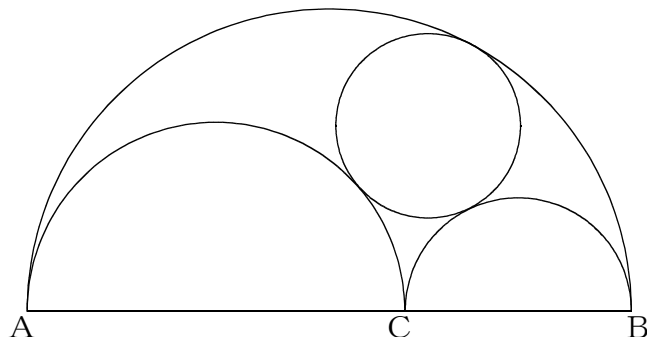
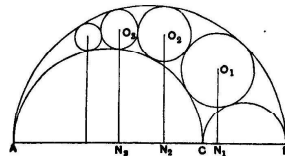
† In general, if $AC : CB = \lambda : 1$, we have

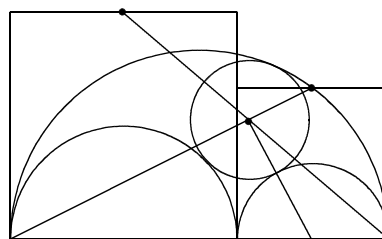
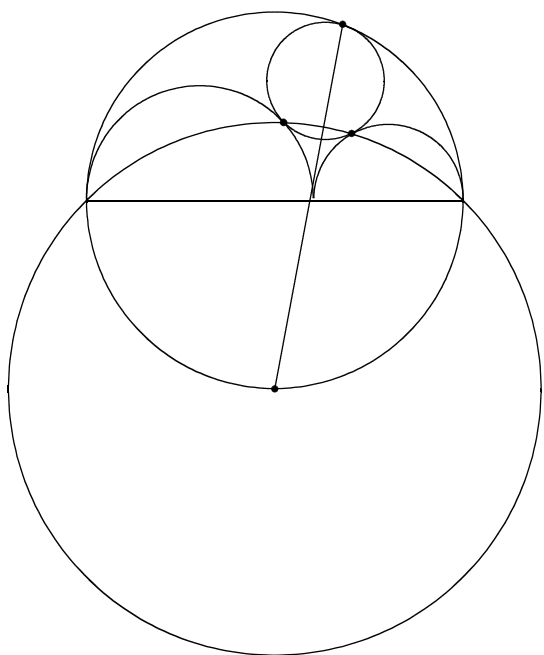
$$BP : PN : NA : AB = 1 : \lambda : \lambda^2 : (1 + \lambda + \lambda^2),$$

and

$$GH : AB = \lambda : (1 + \lambda + \lambda^2).$$

It may be interesting to add the enunciation of the "ancient proposition" stated by Pappus (p. 206) and proved by him after several auxiliary lemmas.





6. 算法天生法指南 (最上流の教科書) 会田安明 (1811 年) より

今有_三如圖直内隔斜容大小圓只云大圓徑二長寸三問小

圓徑幾何

答曰小圓徑一寸

矩曰置混沌一命小

術曰以甲乙徑和除甲徑得乙徑以除甲乙徑相乘得

內徑合問

以相

消得

乙

甲乙和

天

得

又

辰申

卯申

寅申

天

各解

括之

乙

丙

甲

乙丙

天

矩曰置混沌一命小

各求之

依三斜

術求天

子申

丑申

寅申

天

各解之

撰之括

今有_三如圖圓内容四圓只云甲圓徑一十寸乙

圓徑七寸問丙圓徑幾何

答曰丙圓徑六寸

術曰以大徑除小徑半大徑和得外徑合問

合圓求式

矩仍得外

合圓求式

小大常

大

式圓外得

術則如左

< 現代語訳 >

図のように、円内に四円を容れたものがある。

甲円の直径 14 寸、乙円の直径 7 寸のとき、丙円の直径を求めなさい。 答 6 寸

$$\text{子} = \frac{\text{甲} + \text{乙}}{2}, \text{丑} = \frac{\text{甲} + \text{丙}}{2}, \text{寅} = \frac{\text{乙} + \text{丙}}{2}, \text{卯} = \frac{\text{甲} + \text{乙}}{2} - \frac{\text{丙}}{2}, \text{辰} = \frac{\text{甲} + \text{乙}}{2} - \frac{\text{乙}}{2} \quad \text{とする。}$$

三斜術により天を求める。

$$\text{天} = \frac{\text{子}^2}{2 \text{子}} - \frac{\text{丑}^2}{2 \text{子}} + \frac{\text{寅}^2}{2 \text{子}} \quad \text{これを整理して、} \quad 2 \text{天} = \text{乙} - \frac{(\text{甲} - \text{乙}) \text{丙}}{\text{甲} + \text{乙}}$$

$$\text{天} = \frac{\text{辰}^2}{2 \text{辰}} - \frac{\text{卯}^2}{2 \text{辰}} + \frac{\text{寅}^2}{2 \text{辰}} \quad \text{これを整理して、} \quad 2 \text{天} = -\text{乙} + \text{丙} + \frac{2 \text{乙} \times \text{丙}}{\text{甲}}$$

この2つの式から天を消去すれば、

$$2 \text{乙} - \frac{(\text{甲} - \text{乙}) \text{丙}}{\text{甲} + \text{乙}} - \text{丙} - \frac{2 \text{乙} \times \text{丙}}{\text{甲}} = 0 \quad \text{これを整理して、} \quad (\text{甲} + \text{乙}) \text{甲} \times \text{乙} - \{ \text{乙}(\text{甲} + \text{乙}) + \text{甲}^2 \} \text{丙} = 0$$

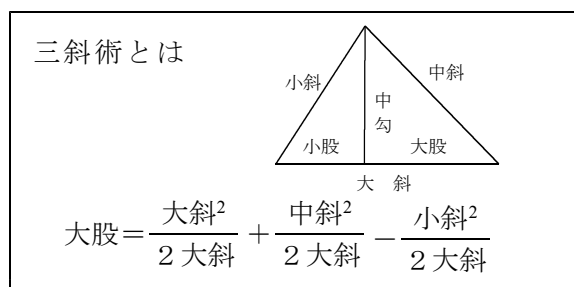
したがって、丙を求める式は、

$$\text{丙} = \frac{\text{甲} \times \text{乙}}{\frac{\text{甲}^2}{\text{甲} + \text{乙}} + \text{乙}}$$

<補足> この式を普通に表現すれば、

$$\text{丙} = \frac{\text{甲} \cdot \text{乙} \cdot (\text{甲} + \text{乙})}{\text{甲}^2 + \text{甲} \cdot \text{乙} + \text{乙}^2} \quad \text{となる。}$$

これは、Geometry Expressions の結果と一致する。



7. パプスの数学集成 (Pappus's Collection) より

右の図のようにアルベロスの中に一列の円が接して置かれている。

円 O_1 、 O_2 、 $O_3 \dots$ の直径を d_1 、 d_2 、 $d_3 \dots$ とし、中心 O_1 、 O_2 、 $O_3 \dots$ から AB に下ろした垂線の足を N_1 、 N_2 、 $N_3 \dots$ とすると、

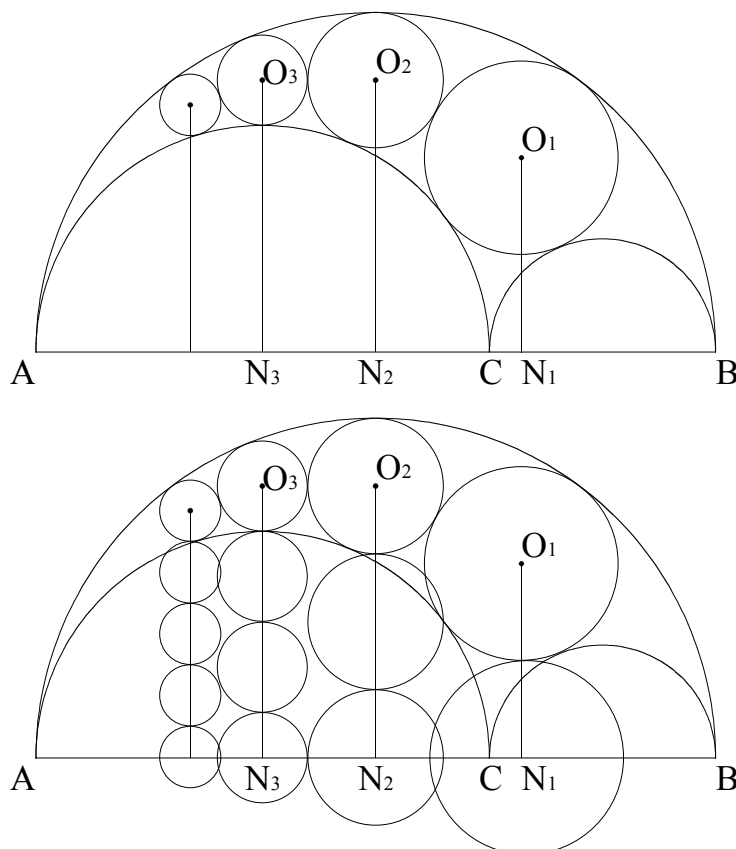
$$O_1 N_1 = d_1$$

$$O_2 N_2 = 2d_2$$

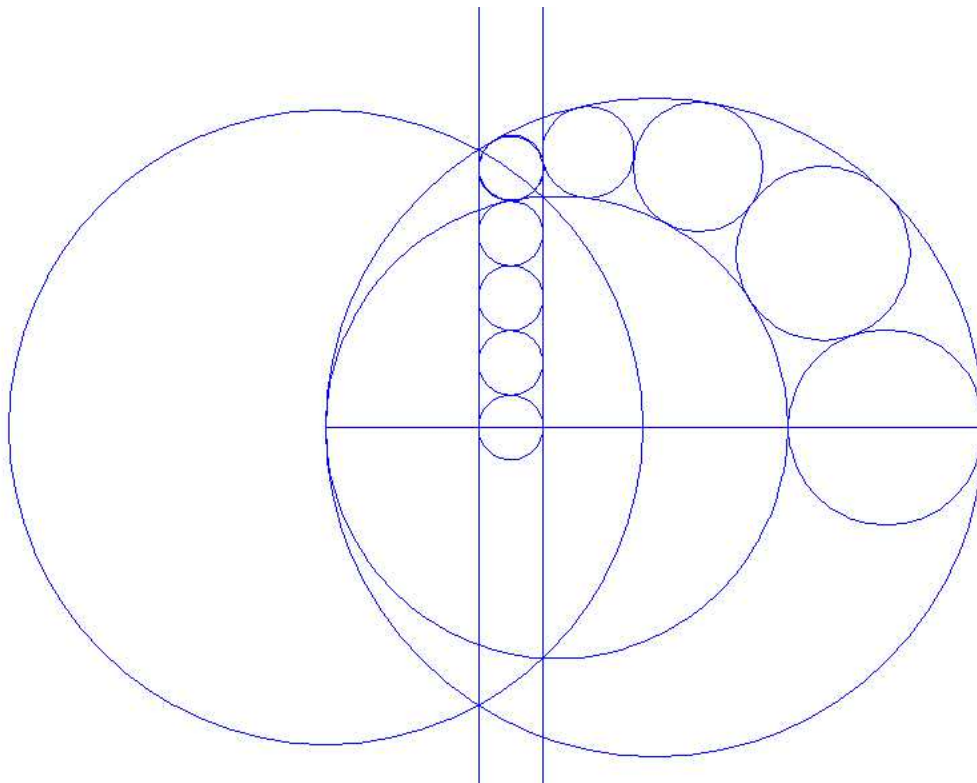
$$O_3 N_3 = 3d_3$$

$\dots$

$$O_n N_n = n d_n \quad \text{が成り立つ。}$$



8. Cinderella.2 を使った反転による証明

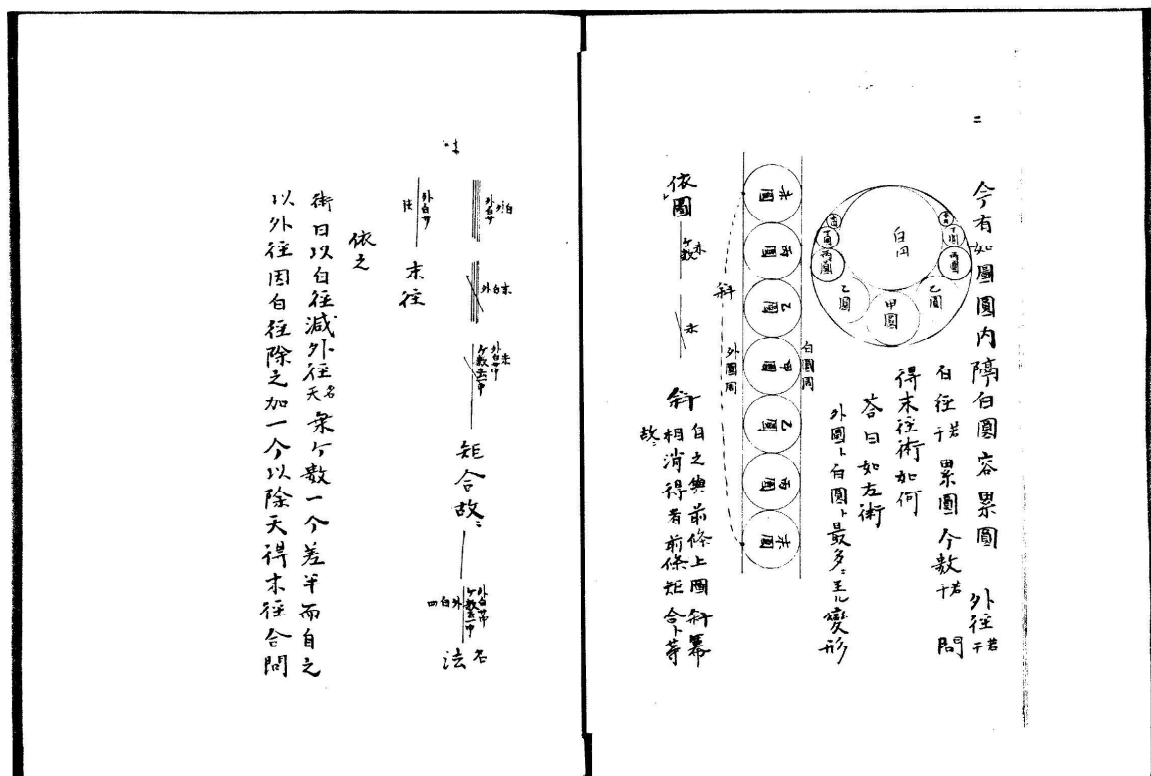


A を中心とし、小円への接線の長さを半径とする円で反転すると、このような図になるので簡単に証明される。この証明法は有名で多くの本に記載されている。

作図ツール無しにこの図をイメージできた先人の想像力には驚かされる。

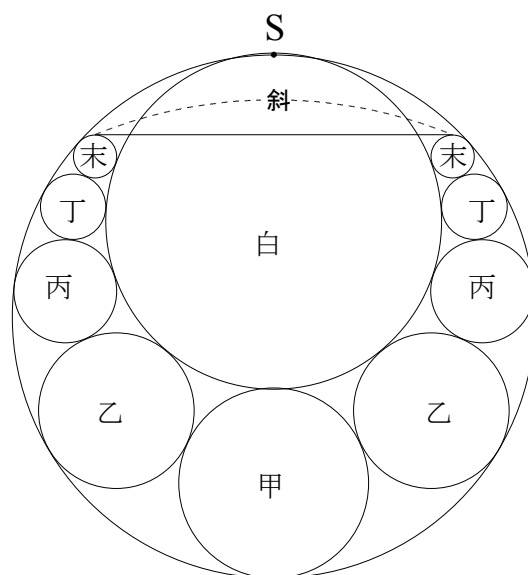
なお、反転法はマグヌス (Magnus) によって 1831 年に考案されたものである。

9. 観新考算変 法道寺 善 (1862 年) より



<現代語訳>

外円に白円が点 S で接している。はじめ両円の中心線上に接するように甲円を置き、順次両円に接するように乙円、丙円、丁円・・・を描いていく。最後に描いた円を末円とする。
外円と白円の直径および容れた円の個数(a)から末円の直径を求めよ。



外円と白円の直径を大きくして無限大になった場合を考えると図のように、外円周と白円周は平行線となり、その間に a 個の等しい大きさの円が外接してはさまれる形になる。

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \quad \text{斜} &= a \text{ 末} - \text{末} = (a - 1) \text{ 末} \\ \text{斜}^2 &= (a - 1)^2 \text{ 末}^2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

元の図で、四円傍斜術より、

$$\text{斜}^2 = \frac{4 \cdot \text{外} \cdot \text{白} \cdot \text{末}}{\text{外} - \text{白}} - \frac{4 \cdot \text{外} \cdot \text{白} \cdot \text{末}^2}{(\text{外} - \text{白})^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

① = ② より

$$4(\text{外} - \text{白}) \cdot \text{外} \cdot \text{白} - 4 \text{ 外} \cdot \text{白} \cdot \text{末} - (a - 1)^2 (\text{外} - \text{白})^2 \text{ 末} = 0$$

$$\text{よって、} \quad \text{末} = \frac{4 \cdot \text{外} \cdot \text{白} \cdot (\text{外} - \text{白})}{4 \cdot \text{外} \cdot \text{白} + (a - 1)^2 (\text{外} - \text{白})^2}$$

<補足>

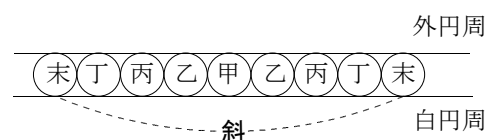
ここで、 $\text{外} = \text{白} + \text{甲}$ 、 $\text{外} - \text{白} = \text{甲}$ 、 $a - 1 = 2n$ であるので、この式を表現し直せば、

$$\text{末} = \frac{\text{白} \cdot \text{甲} \cdot (\text{白} + \text{甲})}{\text{白}^2 + \text{白} \cdot \text{甲} + n^2 \cdot \text{甲}^2}$$

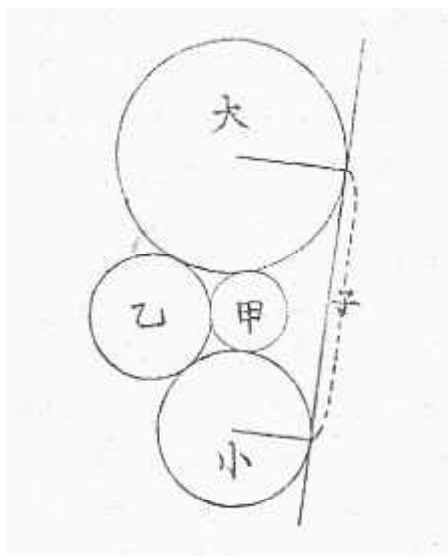
これは、Geometry Expressions の結果と一致する。

<疑問点>

2つの図で①と②の斜を等しいと置く理由は何も書かれていない。
しかしながら、Sを中心とし、Sから末円に引いた接線の長さを中心とする円で反転を行えば、確かにこのような図ができる。したがって、得られた結果は正しい。法道寺はこの手法で多くの問題に正しい結果を残している。あらかじめうまくいく問題を選んで当てはめただけなのか？それとも反転法と同じ考えに到達していたのか？ 大いなる謎である。



四円傍斜術とは、 算法助術(江戸時代の有名な公式集) (1841 年)より



傍斜とは共通外接線の長さを指す言葉

半径ではなく直径で表現されていることに注意



$$(大 - 小)^2 \cdot 甲^2 \cdot 乙^2 - 2(甲 + 乙)(大 - 小) \cdot 甲 \cdot 乙 \cdot 子^2 - 4大 \cdot 小 \cdot 甲 \cdot 乙 \cdot 子^2 + (甲 + 乙)^2 \cdot 子^4 = 0$$

< 注意 > 外接と内接が入れ替わる時は + を - に変える。