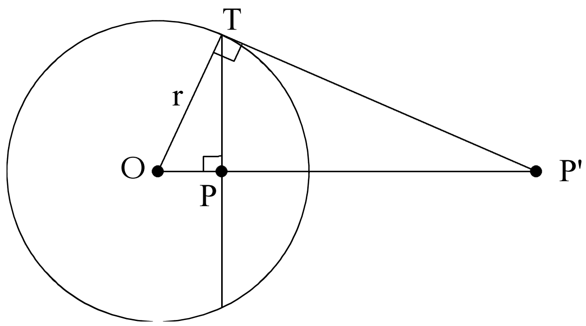
２０１０．５．１
台東区立柏葉中学校
永井信一

早数教分科会レポート
「和算と反転法について」

定義　半径ｒ，中心Ｏの円がある。平面上の点Ｐに対して，点Ｐ'を

$$OP \cdot OP' = r^2$$

となるようにＯを端点とする半直線ＯＰ上にとる。
このとき，点Ｐから点Ｐ'への対応を反転という。
Ｏを反転の中心、ｒを反転の半径という。



Ｐを通りＯＰに垂直な弦とＴにおける接線の交点をＰ'とすると、

△ＯＰＴ∽△ＯＴＰ'　だから

$$\frac{OP}{OT}=\frac{OT}{OP'}$$　すなわち　$OP \times OP' = r^2$

点Ｐが円Ｏの内部にある場合の反転の作図

★点Ｐが円Ｏの外部にある場合には、ＯＰを直径とする円を作図すればよい。

★作図ツール Cabri には最初から反転の機能が存在する。

性質１　反転の中心を通る直線の反転はそれ自身である。
反転の中心を通らない直線の反転は反転の中心を通る円に反転される。

性質２　反転の中心を通る円は反転の中心を通らない直線に反転される。
反転の中心を通らない円は反転の中心を通らない円に反転される。

性質３　２つの円が反転の中心で接しているとき、これらは平行な２直線に反転される。
反転の中心以外で接しているとき、これらは接する２つの円に反転される。

性質４　接していない２つの円は、反転の中心をうまくとれば同心円に反転することができる。

法道寺善の算変法「観術」より

今有如図円内容五円東径三寸西径一寸南径二寸問外径及心径北径幾何

答　北径一寸二分　外径　五寸零余　心径　六分五厘二余

　　　　　　　　　　　５．０１６０８　　０．６５２４４７

解法　四円傍斜術により、

子^2(東＋西)･外－２子^2･東･西＋４東･西･南･北－２(南＋北)･外･東･西＝０

外円と西円の直径を無限大にすると円周は平行線となる・・・外西二円大極之図

この図から、子$=\sqrt{東・北}+\sqrt{東・南}$

ここで、２東＝南、２東＝北を代入して、子^2＝２南･北

２南･北(東＋西)･外－４東･西･南･北＋４東･西･南･北－２(南＋北)･東･西･外＝０

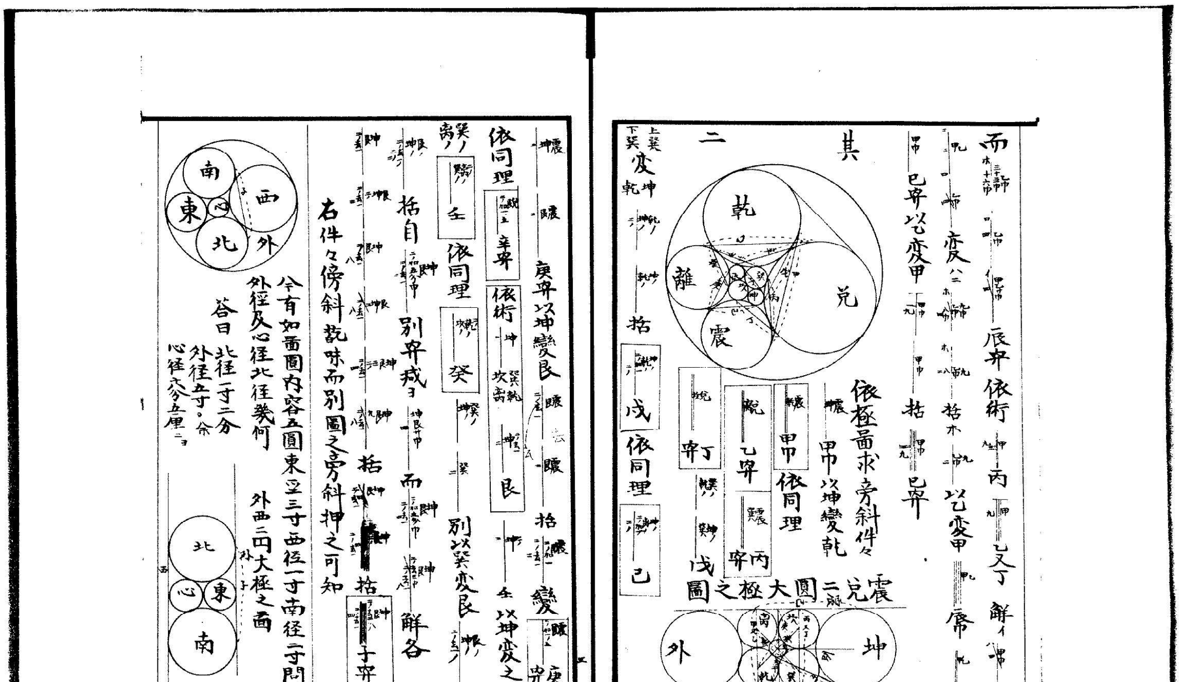
(東＋西)･南･北－(南＋北)･東･西＝０

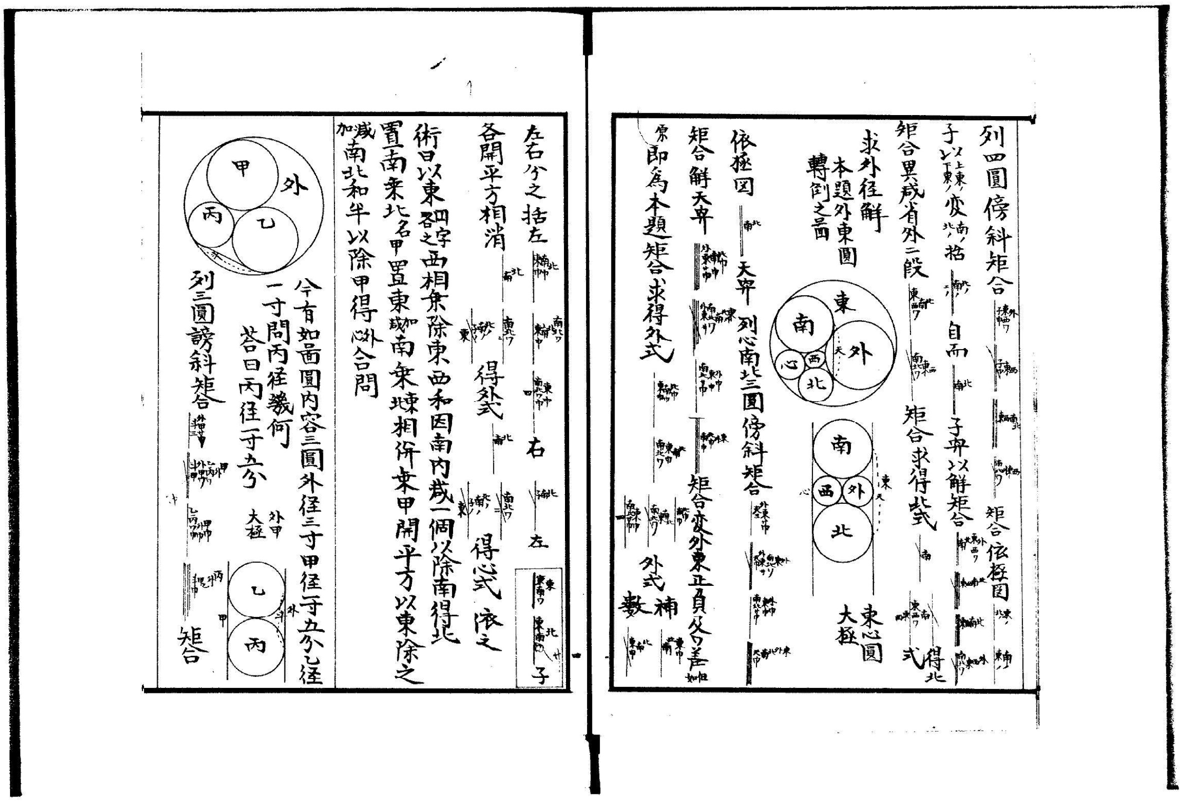
この式から、北径を求めることができる。

さらに東･西･南･北で割れば、

$$\frac{1}{東}+\frac{1}{西}=\frac{1}{南}+\frac{1}{北}$$ というきれいな関係式が求められるが、

このような表記は記載されていない。





次に、本題外東円転倒の図から東心円太極の図を考え次のような方程式を導いている。

「円の直径をしだいに大きくすれば、それが直線となり、さらに大きくすれば転倒する！」

外円を求める２次方程式

$$東^2\cdot南^2\cdot北^2+(南+北)\cdot東^2\cdot南\cdot北\cdot外+\left\{\frac{1}{4}(南-北)^2\cdot東^2-(南+北)\cdot東\cdot南\cdot北+南^2\cdot北^2\right\}\cdot外^2=0$$

これを整理して、１次方程式に直すと

$$\left(-\frac{\sqrt{子}\,\sqrt{南}\,\sqrt{北}}{東}+\frac{南+北}{2}\right)\cdot外+南\cdot北=0$$

ただし、　子＝(東＋南)・東＋(東－南)・北

心円を求める式は

$$\left(-\frac{\sqrt{子}\,\sqrt{南}\,\sqrt{北}}{東}-\frac{南+北}{2}\right)\cdot外+南\cdot北=0$$