早数教分科会レポート

北野天満宮の算額について

柏葉中学校　永井信一

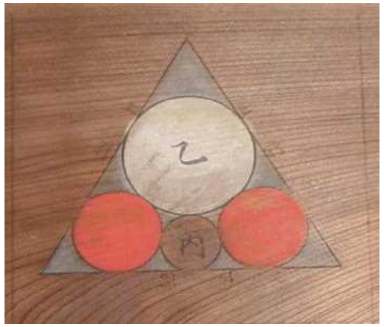
北野天満宮　京都市上京区　　絵馬堂内に現存

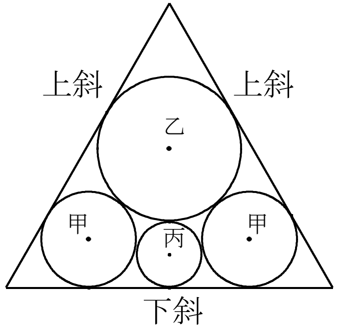
明治 12 年(1878)　新名重内，三室戸治光，倉橋泰清など 11 名 奉納

大きさ　184 × 93cm　　　　　図形の問題が全部で１１問

新名重内は関流の長谷川弘の弟子である。

＜第１０問＞





今有圭内如図容四円上斜一千〇一十四寸
下斜一千四百二十八寸問甲円径幾何

答曰　甲円径三百五十七寸

術曰置下斜以上斜除之加二個名乾開
平方加一個四之内減乾三段餘開平方
加二個名坤置四個内減乾餘開平方乗
下斜以坤除之得甲円径合問

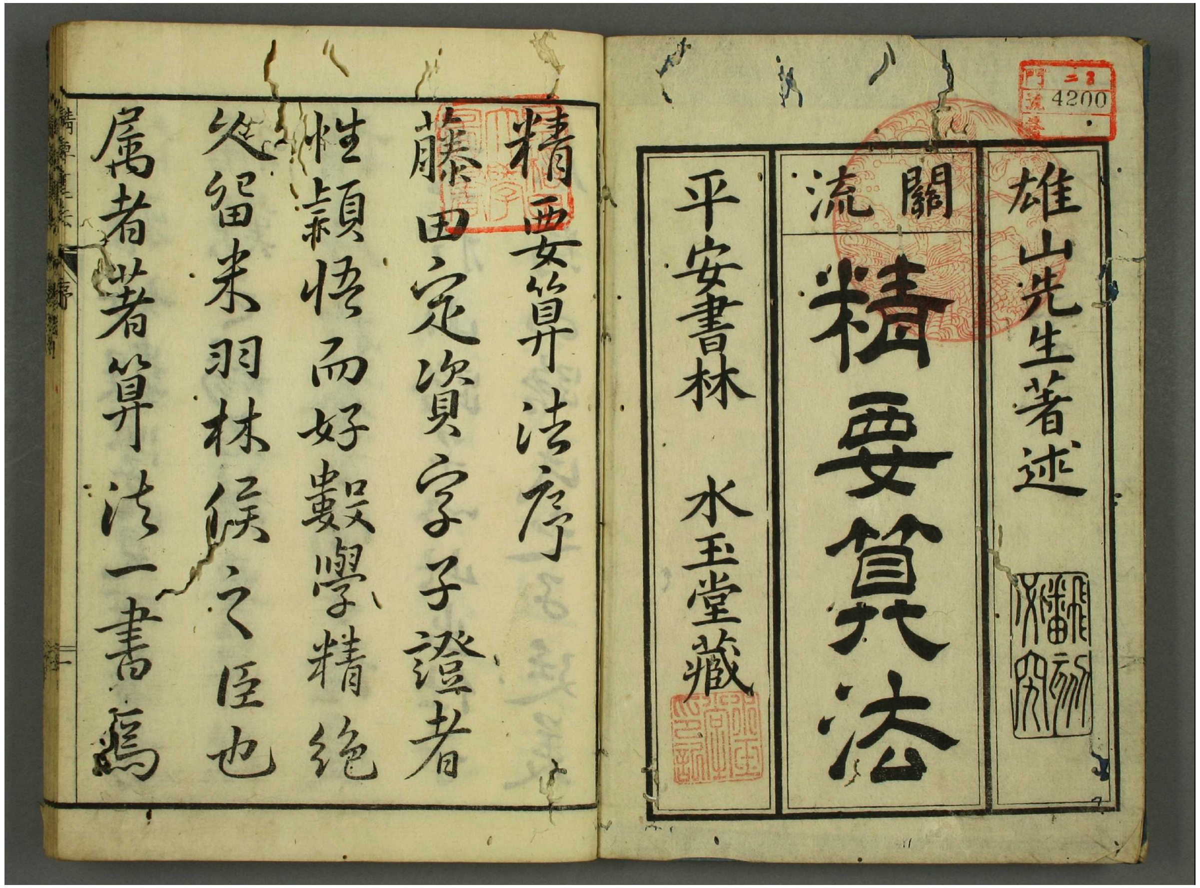
京都　矢野善助随貫　撰

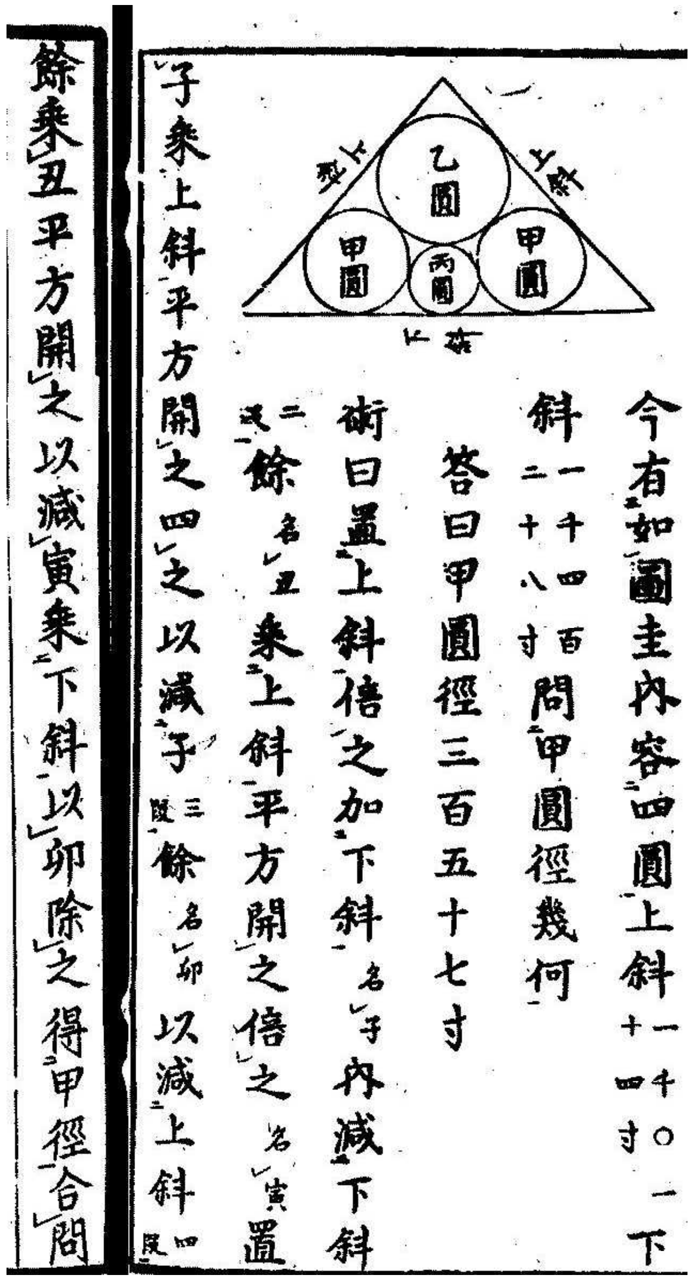
＜問題の意味＞

図のように，二等辺三角形の中に４つの円が互いに接するように入っている。
上斜が１０１４寸，
下斜が１４２８寸のとき，
甲円の直径を求めよ。

答　３５７寸

この問題は，精要算法＜右の図　下巻　第４３問＞と同様のものである。ただし術文は最上流の会田安明のものに近い。このことは後述する。
　藤田貞資(定資)の主著である精要算法は天明元年(1781)に発行され，凡例の「算数に用の用あり，無用の用あり，無用の無用あり」は有名。上巻で用の用を丁寧に説明し，中下巻では「関家の禁秘」を実際問題に書き替えて説明している。この書によって和算が一変したと言われている名著である。
その解法を説明した本も多数存在している。今回は東北大学図書館デジタルコレクションの和算資料データベースにある「精要算法下巻解　佐伯是広校訂」を現代語に翻訳しながら和算家の解法を見てみよう。





今有如圖圭内容四圓上斜一千〇一十四寸下斜一千四百二十八寸問甲圓徑幾何
答曰甲圓徑三百五十七寸
術曰置上斜倍之加下斜名子内減下斜二段餘名丑乘上斜平方開之倍之名寅置子乘上斜平方開之四之以減子三段餘名卯以減上斜四段餘乘丑平方開之以減寅乘下斜以卯除之得甲徑合問

甲円，乙円，丙円の直径をそれぞれ，甲，乙，丙と表す。

また，上斜を上，下斜を下と表す。

$子=2上+下$

$丑=2上-下$　と置く。　子は二等辺三角形の周になる。

中勾は二等辺三角形の高さのこと。

$$中勾^2=\frac{子\cdot丑}{4}$$ となる。

三平方の定理から，

$$\begin{aligned}中勾^2&=上^2-\left(\frac{下}{2}\right)^2\\&=\frac{4上^2-下^2}{4}\\&=\frac{(2上+下)(2上-下)}{4}\\&=\frac{子\cdot丑}{4}\end{aligned}$$

全円は三角形の内接円のこと。

全円の直径→全　と表す。

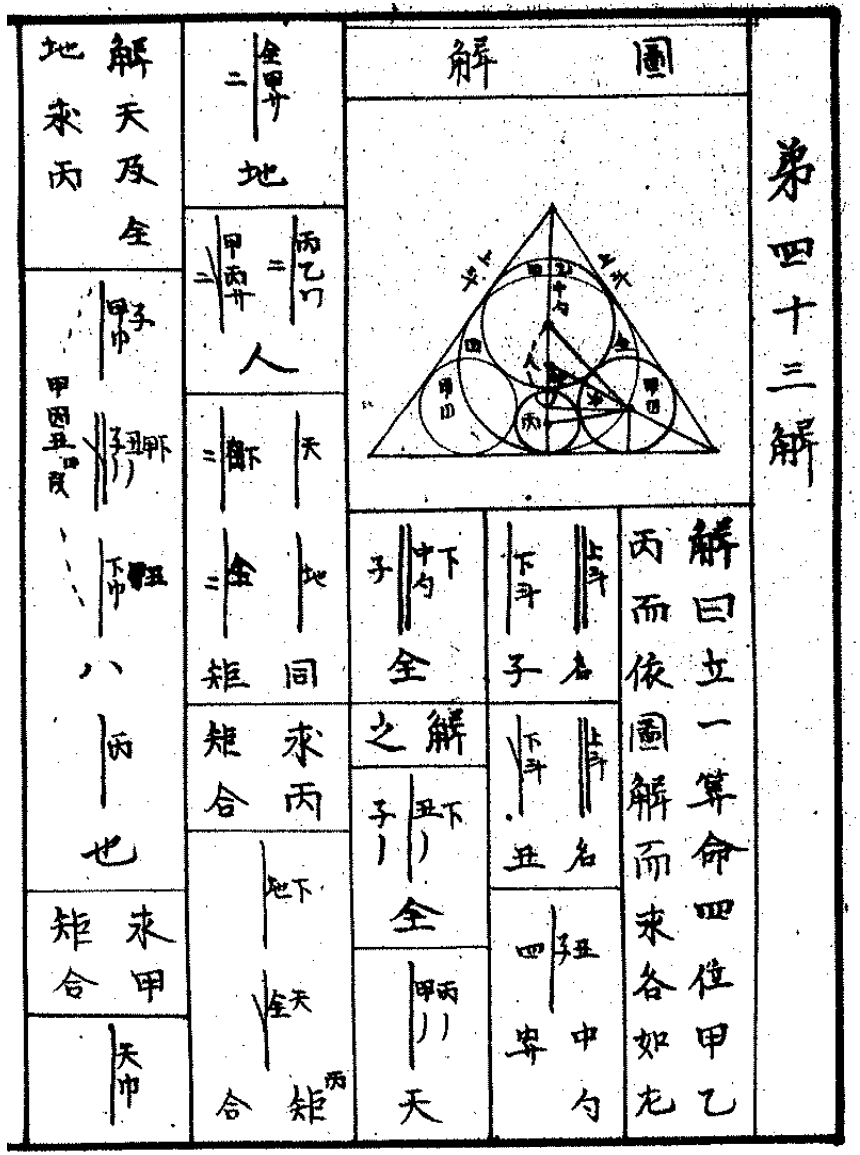
三角形の面積の関係から，

$$全=\frac{2中勾\cdot下}{子}$$ となるから，

$$全=\frac{\sqrt{丑\cdot下}}{\sqrt{子}}$$ となる。

$2中勾=\sqrt{子\cdot丑}$ を代入すると，

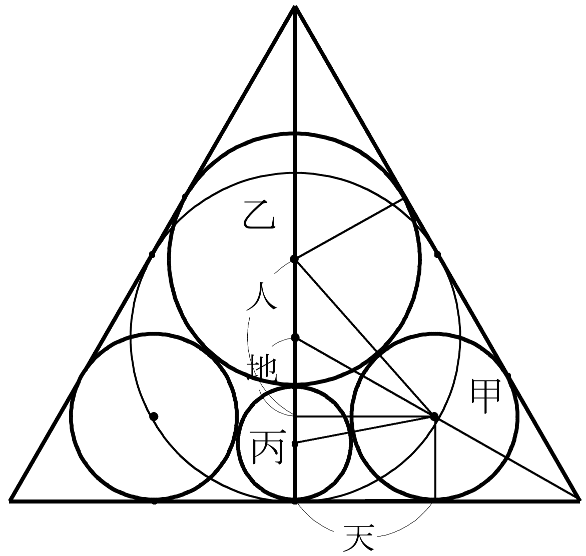
$$全=\frac{\sqrt{子\cdot丑}\cdot下}{子}=\frac{\sqrt{丑\cdot下}}{\sqrt{子}}$$



$天=\sqrt{甲}\sqrt{丙}$　　と置く。　　天は甲円と丙円の接点間の距離を表す。

$地=\dfrac{全-甲}{2}$　　と置く。

$人=\dfrac{丙+乙}{2}-\dfrac{甲-丙}{2}$　　と置く。



三角形の相似の関係から，

$天:地=\dfrac{下}{2}:\dfrac{全}{2}$　　より，　　$地\cdot下-全\cdot天=0$

天，地，全を代入すると，

$$\frac{全-甲}{2}\cdot下-全\cdot\sqrt{甲}\sqrt{丙}=0$$

$$\sqrt{丙}=\frac{(全-甲)\cdot下}{2全\cdot\sqrt{甲}}$$

$$丙=\frac{(全-甲)^2\cdot下^2}{4全^2\cdot甲}=\frac{下^2}{4全^2\cdot甲}(全^2-2全\cdot甲+甲^2)$$

$$=\frac{下^2\cdot丑}{4甲\cdot丑}-\frac{2\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲\cdot下}{4甲\cdot丑}+\frac{甲^2\cdot子}{4甲\cdot丑}$$

$$=\frac{\left(下\sqrt{丑}-甲\sqrt{子}\right)^2}{4甲\cdot丑}$$

三平方の定理から，

$$天^2+人^2-\frac{(甲+乙)^2}{4}=0$$

天，人を代入すると，

$$甲\cdot丙+\left(\frac{丙+乙}{2}-\frac{甲-丙}{2}\right)^2-\frac{(甲+乙)^2}{4}=0$$

分母を払って整理すると，

$4丙^2+4丙\cdot乙-4甲\cdot乙=0$　　…甲矩合

$甲\cdot乙-丙\cdot乙-丙^2=0$

これが４つの円の関係式となる。

<算法助術（公式６６）と同様の式>

$(甲-丙)乙-丙^2=0$

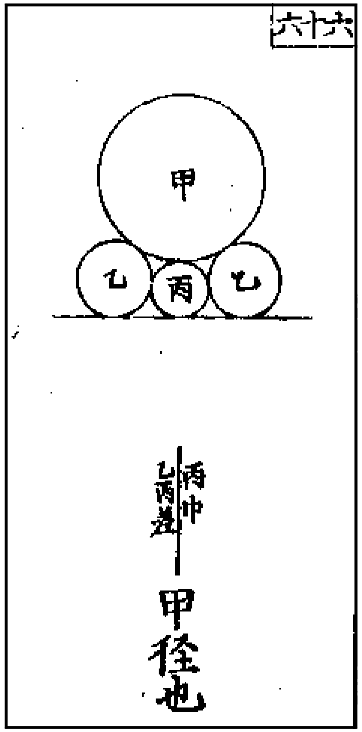
$\frac{子}{2}$ をかけると，

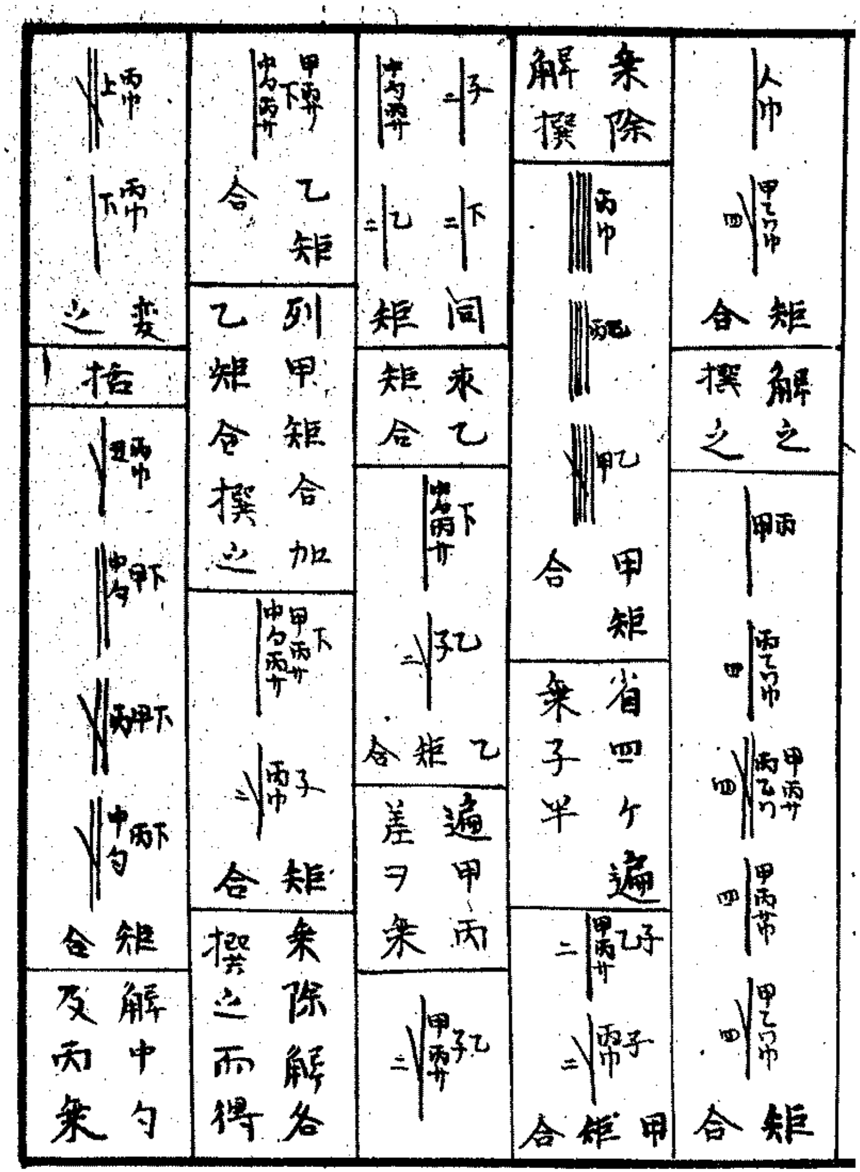
$$\frac{(甲-丙)乙\cdot子}{2}-\frac{丙^2\cdot子}{2}=0 \quad …甲矩合$$

三角形の相似の関係から，

$$\frac{子}{2}:\frac{下}{2}=(中勾-丙):\frac{乙}{2}$$

$$(中勾-丙)下-\frac{子\cdot乙}{2}=0 \quad …乙矩合$$



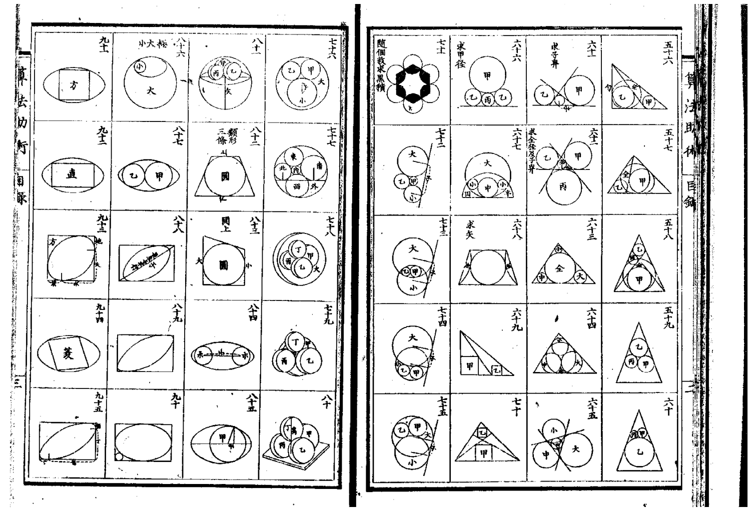


甲－丙　をかけて，

$$-\frac{(\text{甲}-\text{丙})\text{子}\cdot\text{乙}}{2}+(\text{中勾}-\text{丙})\text{下}(\text{甲}-\text{丙})=0 \qquad \cdots\text{乙矩合}$$

<算法助術（1841）>　　　公式集

長谷川弘 閲
山本賀前 編



甲矩合と乙矩合を足すと，

$$(\text{中勾}-\text{丙})(\text{甲}-\text{丙})\text{下}-\frac{\text{丙}^2\cdot\text{子}}{2}=0$$

分母を払って整理すると，

$$2\text{中勾}\cdot\text{甲}\cdot\text{下}-2\text{中勾}\cdot\text{丙}\cdot\text{下}-2\text{丙}\cdot\text{甲}\cdot\text{下}+2\text{丙}^2\cdot\text{下}-\text{丙}^2\cdot\text{子}=0$$

ここで，

$$\begin{aligned}&2\text{丙}^2\cdot\text{下}-\text{丙}^2\cdot\text{子}\\&=2\text{丙}^2\cdot\text{下}-\text{丙}^2(2\text{上}+\text{下})\\&=-(2\text{上}-\text{下})\text{丙}^2\\&=-\text{丑}\cdot\text{丙}^2\end{aligned}$$

だから，

$$-\text{丑}\cdot\text{丙}^2+2\text{中勾}\cdot\text{甲}\cdot\text{下}-2\text{丙}\cdot\text{甲}\cdot\text{下}-2\text{中勾}\cdot\text{丙}\cdot\text{下}=0$$

$\text{中勾}=\dfrac{\sqrt{\text{子}}\sqrt{\text{丑}}}{2}$　および　$\text{丙}=\dfrac{\left(\text{下}\sqrt{\text{丑}}-\text{甲}\sqrt{\text{子}}\right)^2}{4\text{甲}\cdot\text{丑}}$　を代入して，分母を払い，丑で割ると，

$$\begin{aligned}-\left(\text{下}\sqrt{\text{丑}}-\text{甲}\sqrt{\text{子}}\right)^4+16\text{甲}^3\cdot\text{丑}\cdot\text{下}\sqrt{\text{子}}\sqrt{\text{丑}}-8\text{甲}^2\cdot\text{下}\left(\text{下}\sqrt{\text{丑}}-\text{甲}\sqrt{\text{子}}\right)^2&\\-4\text{甲}\cdot\text{下}\sqrt{\text{子}}\sqrt{\text{丑}}\left(\text{下}\sqrt{\text{丑}}-\text{甲}\sqrt{\text{子}}\right)^2&=0\end{aligned}$$

$$\text{子}^2\cdot\text{甲}^4-2\text{子}\cdot\text{丑}\cdot\text{下}^2\cdot\text{甲}^2+\text{下}^4\cdot\text{丑}^2-16\text{下}\cdot\text{丑}\sqrt{\text{子}}\sqrt{\text{丑}}\cdot\text{甲}^3-16\text{下}^2\sqrt{\text{子}}\sqrt{\text{丑}}\cdot\text{甲}^3+8\text{子}\cdot\text{下}\cdot\text{甲}^4+8\text{丑}\cdot\text{下}^3\cdot\text{甲}^2=0$$

ここで，　丑＋下＝2上　だから，

$$-16下\cdot丑\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3-16下^2\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3$$
$$=-16下\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3(丑+下)$$
$$=-16下\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3(2上)$$
$$=-32上\cdot下\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3$$

したがって，

$$子^2\cdot甲^4-2子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2+下^4\cdot丑^2-32上\cdot下\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3$$
$$+8子\cdot下\cdot甲^4+8丑\cdot下^3\cdot甲^2=0$$

$-2子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2=2子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2-4子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2$

のように項をわけて，

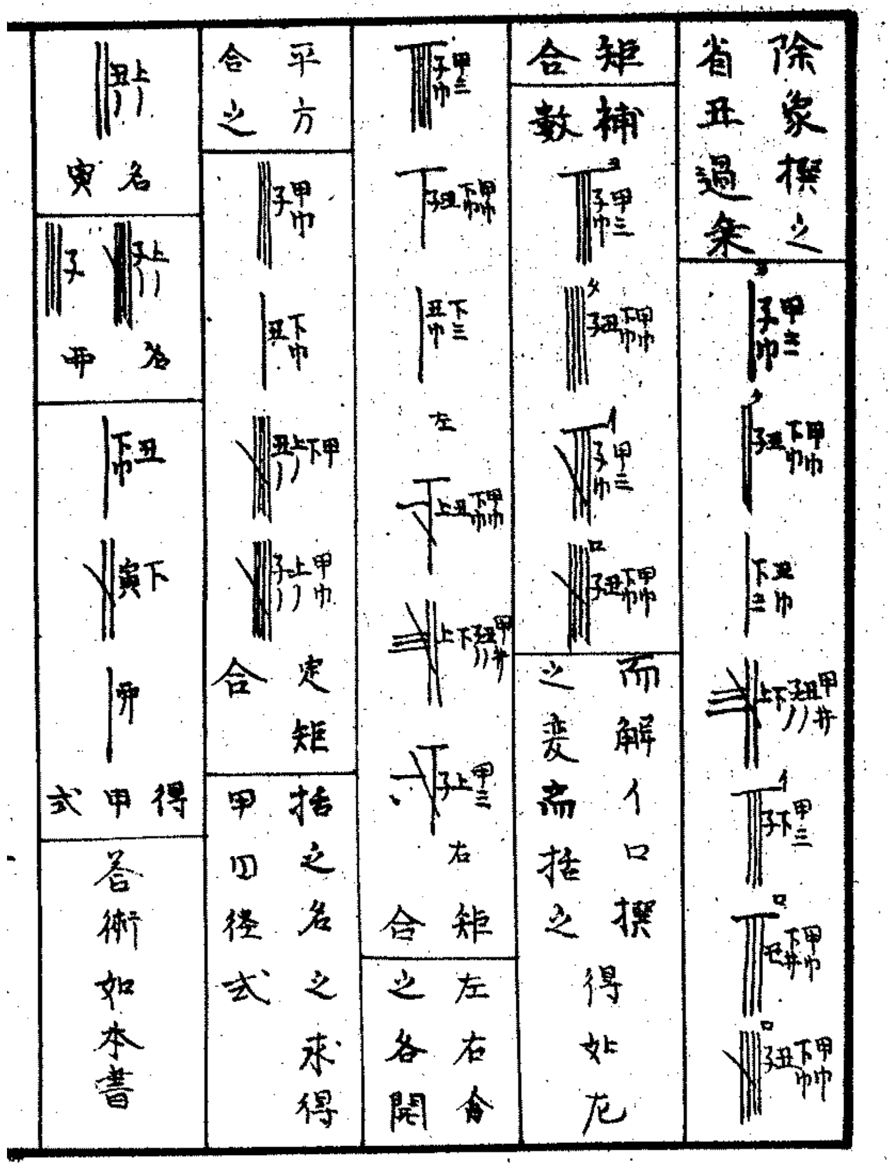
$$子^2\cdot甲^4+2子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2+下^4\cdot丑^2-32上\cdot下\cdot\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3$$
$$+8子\cdot下\cdot甲^4+8丑\cdot下^3\cdot甲^2-4子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2=0$$

因数分解（平方完成）するために，以下の項を付け加える。

$8子^2\cdot甲^4+4子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2-8子^2\cdot甲^4-4子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2$

$$9子^2\cdot甲^4+6子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2+下^4\cdot丑^2-8子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2$$
$$+8丑\cdot下^3\cdot甲^2-32上\cdot下\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3$$
$$-8子^2\cdot甲^4+8子\cdot下\cdot甲^4=0$$

$$9子^2\cdot甲^4+6子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2+下^4\cdot丑^2-8丑\cdot下^2\cdot甲^2(子-下)$$
$$-32上\cdot下\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3-8子\cdot甲^4(子-下)=0$$



$子-下=2上$　だから，

$$9子^2\cdot甲^4+6子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2+下^4\cdot丑^2-8丑\cdot下^2\cdot甲^2(2上)-32上\cdot下\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3-8子\cdot甲^4(2上)=0$$

$$9子^2\cdot甲^4+6子\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2+下^4\cdot丑^2-16上\cdot丑\cdot下^2\cdot甲^2-32上\cdot下\sqrt{子}\sqrt{丑}\cdot甲^3-16子\cdot上\cdot甲^4=0$$

$$(3子\cdot甲^2+丑\cdot下^2)^2-\left(4\sqrt{丑}\sqrt{上}下\cdot甲+4\sqrt{子}\sqrt{上}\cdot甲^2\right)^2=0$$　前後にわけて，因数分解（平方完成）した。

$$3子\cdot甲^2+丑\cdot下^2-4\sqrt{丑}\sqrt{上}下\cdot甲-4\sqrt{子}\sqrt{上}\cdot甲^2=0$$　…定矩合

$$\left(3子-4\sqrt{子}\sqrt{上}\right)甲^2-4\sqrt{丑}\sqrt{上}下\cdot甲+丑\cdot下^2=0$$　甲の２次方程式になった。

ここで，$2\sqrt{丑}\sqrt{上}=寅$，　$3子-4\sqrt{子}\sqrt{上}=卯$　と置くと，

$$卯\cdot甲^2-2寅\cdot下\cdot甲+下^2\cdot丑=0$$　甲を求める２次方程式が完成した。　本文はここまで。

解の公式を使って解くと，

$$\begin{aligned}甲&=\frac{寅\cdot下-\sqrt{寅^2下^2-卯\cdot下^2\cdot丑}}{卯}\\&=\frac{\left(寅-\sqrt{寅^2-卯\cdot丑}\right)下}{卯}\\&=\frac{\left(寅-\sqrt{4上\cdot丑-卯\cdot丑}\right)下}{卯}\\&=\frac{\left\{寅-\sqrt{(4上-卯)丑}\right\}下}{卯}\end{aligned}$$

これで精要算法の術文に一致する。

この術文に条件を代入して計算すると，

上＝１０１４

下＝１４２８

子＝２上＋下＝３４５６

丑＝２上－下＝６００

寅＝１５６０

卯＝２８８０

甲＝３５７　　　となり，算額の答に一致する。

一方，北野天満宮の算額の術文は次のようになる。

$$\frac{\text{下}}{\text{上}}+2=\text{乾}\quad \text{と置く。}$$

$$\sqrt{4\left(\sqrt{\text{乾}}+1\right)-3\text{乾}}+2=\text{坤}\quad \text{と置く。}$$

$$\text{甲}=\frac{\sqrt{4-\text{乾}}\,\text{下}}{\text{坤}}$$

これが精要算法の術文と一致することを示そう。

坤を戻して，分母を有理化すると，

$$\begin{aligned}\text{甲}&=\frac{\sqrt{4-\text{乾}}\,\text{下}}{\text{坤}}\\&=\frac{\sqrt{4-\text{乾}}\,\text{下}}{\sqrt{4\left(\sqrt{\text{乾}}+1\right)-3\text{乾}}+2}\\&=\frac{\sqrt{4-\text{乾}}\,\text{下}\left\{\sqrt{4\left(\sqrt{\text{乾}}+1\right)-3\text{乾}}-2\right\}}{4\left(\sqrt{\text{乾}}+1\right)-3\text{乾}-4}\\&=\frac{\sqrt{4-\text{乾}}\,\text{下}\left\{\sqrt{4\left(\sqrt{\text{乾}}+1\right)-3\text{乾}}-2\right\}}{4\sqrt{\text{乾}}-3\text{乾}}\end{aligned}$$

ここで，

$$\text{乾}=\frac{\text{下}}{\text{上}}+2=\frac{2\text{上}+\text{下}}{\text{上}}=\frac{\text{子}}{\text{上}}\qquad 4-\text{乾}=4-\left(\frac{\text{下}}{\text{上}}+2\right)=2-\frac{\text{下}}{\text{上}}=\frac{2\text{上}-\text{下}}{\text{上}}=\frac{\text{丑}}{\text{上}}$$

$$\text{寅}=2\sqrt{\text{丑}}\sqrt{\text{上}}\qquad \text{卯}=3\text{子}-4\sqrt{\text{子}}\sqrt{\text{上}}$$

であるから，

$$分母=4\sqrt{乾}-3乾=4\sqrt{\frac{子}{上}}-\frac{3子}{上}=-\frac{1}{上}\left(3子-4\sqrt{子}\sqrt{上}\right)=-\frac{卯}{上}$$

$$\begin{aligned}
分子&=\sqrt{4-乾}\,下\left\{\sqrt{4\left(\sqrt{乾}+1\right)-3乾}-2\right\}\\
&=\sqrt{\frac{丑}{上}}\cdot下\left\{\sqrt{4\left(\sqrt{\frac{子}{上}}+1\right)-\frac{3子}{上}}-2\right\}\\
&=\sqrt{\frac{丑}{上}}\cdot下\left\{\sqrt{\frac{1}{上}\left\{-3子+4\left(\sqrt{子}\sqrt{上}+上\right)\right\}}-2\right\}\\
&=\sqrt{\frac{丑}{上}}\cdot下\left\{\sqrt{\frac{1}{上}\left\{4上-\left(3子-4\sqrt{子}\sqrt{上}\right)\right\}}-2\right\}\\
&=\frac{下}{上}\sqrt{丑}\left(\sqrt{4上-卯}-2\sqrt{上}\right)\\
&=\frac{下}{上}\left\{\sqrt{(4上-卯)丑}-2\sqrt{丑}\sqrt{上}\right\}\\
&=\frac{下}{上}\left\{\sqrt{(4上-卯)丑}-寅\right\}
\end{aligned}$$

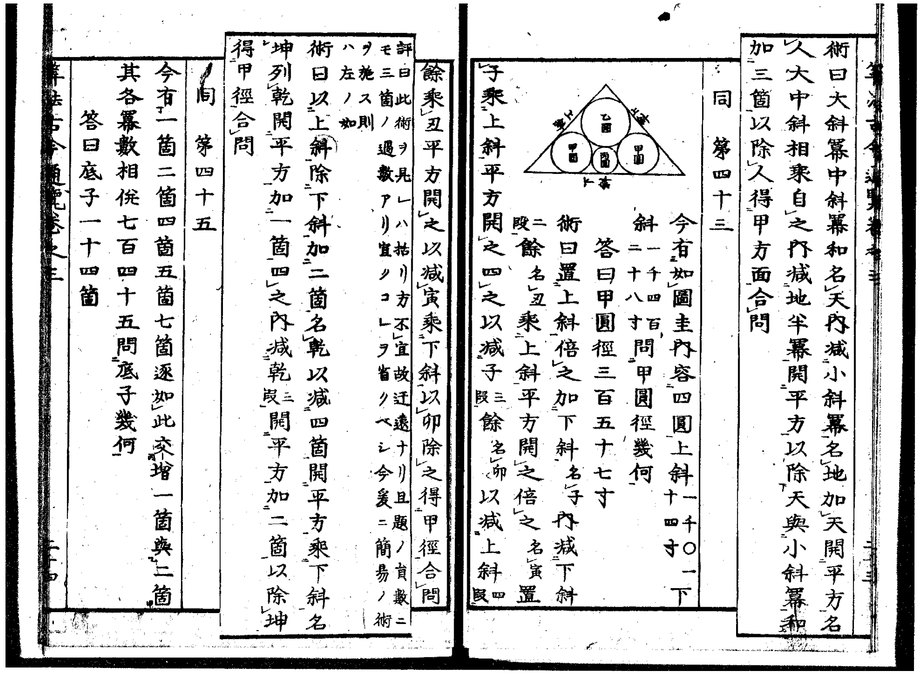
したがって，

$$\begin{aligned}
甲&=\frac{\frac{下}{上}\left\{\sqrt{(4上-卯)丑}-寅\right\}}{-\frac{卯}{上}}\\
&=\frac{\left\{寅-\sqrt{(4上-卯)丑}\right\}下}{卯}
\end{aligned}$$

２つの術文は一致した。

＜古今算法通覧（1795）＞　先行和算書の批判

会田安明 著



算法古今通覧巻之三

術曰大斜冪中斜冪和名天内減小斜冪名地加天開平方名人大中斜相乘自之内減地半冪開平方以除天與小斜冪和加三箇以除人得甲方面合問

同　第四十三

今有如圖圭内容四圓上斜一千〇一十四寸下斜一千四百二十八寸問甲圓徑幾何

答曰甲圓徑三百五十七寸

術曰置上斜倍之加下斜名子内減下斜餘名丑乘上斜平方開之倍之名寅置子乘上斜平方開之四之以減子餘名卯以減上斜餘乘丑平方開之以減寅乘下斜以卯除之得甲徑合問

評曰此術ヲ見レハ括リ方不宜故迂遠ナリ且題ノ員數ニモ三箇ノ過數アリ宜クコレヲ省クベシ今爰ニ簡易ノ術ヲ施ス則ハ左ノ如

術曰以上斜除下斜加二箇名乾以減四箇開平方乘下斜名坤列乾開平方加一箇四之内減乾開平方加二箇以除坤得甲徑合問

同　第四十五

今有一箇二箇四箇五箇七箇逐加此交増一箇與二箇其各冪數相併七百四十五問底子幾何

答曰底子一十四箇

どちらの術文が良いかは，判断しづらいところであるが，当時の関流と最上流（会田安明）の争いの中で術文の「文字数が少ない方が良い解答である」という考え方もあった。また，最上流の天生法はわり算を積極的に取り入れた術文を使う傾向があった。