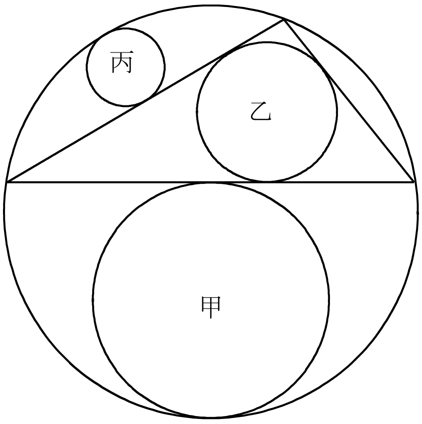
大国魂神社の算額（下段第５問）についての考察

永井信一

１．この算額について

所在地　　府中市宮町　大国魂神社　宝物殿
年　代　　明治１８年（１８８５）
奉納者　　小俣勇門人３６名
形　状　　１２１ｃｍ×２２２ｃｍ　　３６問（３段×１２問）



＜問題（３６問のうち下段第５問）＞

左の図のように，外円内に三角形，甲円，乙円，丙円をかく。甲円の直径が４９寸，乙円の直径が２８寸，丙円の直径が１７寸のとき，外円の直径を求めよ。

＜術文より＞

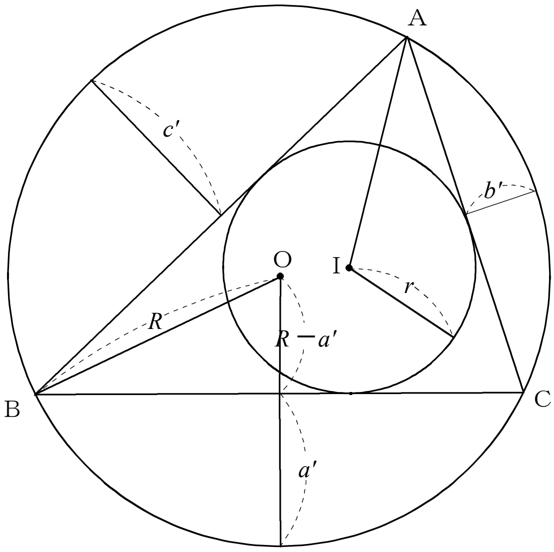
甲×丙×８＝乾　，　乾×２－乙^2＝坤　　とする。

$$\frac{\{(\text{甲}+\text{丙})\times 2+\text{乙}\}\times\text{乾}}{\text{坤}}=\text{外}$$

により，答は８５寸

★同一の問題が村山市楯岡の最上徳内記念館の復元算額にある。
これは天明４年(*1784*)に最上徳内が芝愛宕山に奉納したものを平成５年に『続神壁算法』(藤田嘉言)より復元したものである。

２．問題を解くための準備



△ＡＢＣの外接円の半径をR，内接円の半径をr，各辺の中点から外接円までの距離(これを矢という)をそれぞれa'，b'，c'とする。

このときに成り立つ関係式をいくつか証明する。

① $r=4R\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}\sin\dfrac{\mathrm{B}}{2}\sin\dfrac{\mathrm{C}}{2}$

② $\cos\mathrm{A}+\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{C}=1+\dfrac{r}{R}$

③ $a'+b'+c'=2R-r$

④ $2a'b'c'=r^2R$

【①の証明】

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\mathrm{A}}{2}}=\sqrt{\frac{1-(b^2+c^2-a^2)/2bc}{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\qquad \text{ただし，}\ s=\frac{a+b+c}{2}$$

同様にして，

$$\sin\frac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\quad,\quad \sin\frac{\mathrm{C}}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

また，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　(ヘロンの公式)　，$S=\dfrac{abc}{4R}$　，$S=rs$

よって，

$$4R\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}=4R\times\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}=\frac{4R}{abc}\times\frac{S^2}{s}=\frac{1}{S}\times\frac{S^2}{s}=\frac{S}{s}=r$$

【②の証明】

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$=1+\frac{r}{R}\qquad(①より)$$

$A+B+C=180°$ より，
$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$

よって，

$\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$

【③の証明】

$\cos A=\frac{R-a'}{R}$，$\cos B=\frac{R-b'}{R}$，$\cos C=\frac{R-c'}{R}$　を②に代入すると

$$\frac{R-a'}{R}+\frac{R-b'}{R}+\frac{R-c'}{R}=1+\frac{r}{R}$$

$R-a'+R-b'+R-c'=R+r$
よって，
$a'+b'+c'=2R-r$

【④の証明】

$a'=R(1-\cos A)=2R\sin^2\frac{A}{2}$　　同様にして，$b'=2R\sin^2\frac{B}{2}$，$c'=2R\sin^2\frac{C}{2}$

よって，

$$2a'b'c'=16R^3\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2\times R$$
$$=r^2R\qquad(①より)$$

３．問題の解法

算額の図と２の図を比較すると，甲＝a'＝４９寸，乙＝$2r$＝２８寸，丙＝c'＝１７寸のとき，外＝$2R$を求めればよいことになる。

③より，$b'=2R-r-a'-c'$
これを④に代入すると，
$2a'(2R-r-a'-c')c'=r^2R$
$R(4a'c'-r^2)=2a'c'(a'+c'+r)$

$$2R=\frac{4a'c'(a'+c'+r)}{4a'c'-r^2}$$　したがって，$2R$＝８５寸

乙＝$2r$なので，$2r$をつくるためにこの式の分子と分母に４をかけると，

術文にある $\frac{\{(甲+丙)\times 2+乙\}\times 乾}{坤}=外$　と同じ形になる。