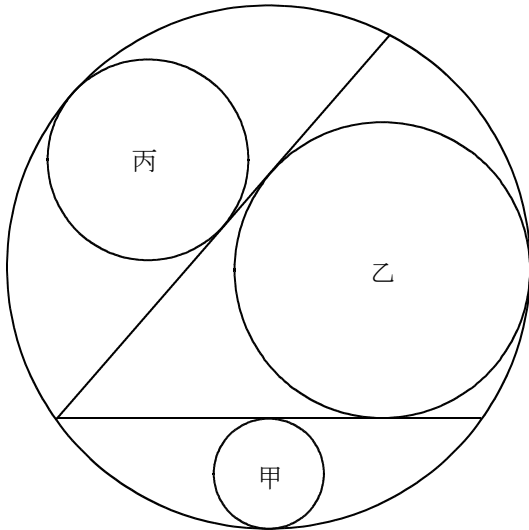


大国魂神社の算額（上段第2問）についての考察

永井信一

1. この算額について

所在地	府中市宮町	大国魂神社	宝物殿
年代	明治18年（1885）		
奉納者	小俣勇門人36名		
形状	121cm × 222cm	36間（3段 × 12間）	



<問題（36問のうち上段第2問）>

左の図のように、外円内に乙円を内接させ、外円の周上から乙円に接線を引き、この接線と円周に内接する甲円、丙円をかく。

甲円の直径が4寸、乙円の直径が13寸、丙円の直径が8寸4分5厘のとき、外円の直径を求めよ。

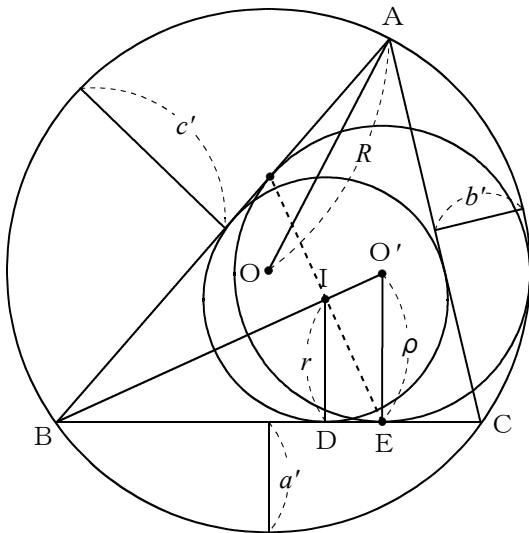
<術文より>

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\text{乙}^2}{\text{甲} \times \text{丙}} + 4} + 2 \right) (\text{甲} + \text{丙}) + \text{乙} \times 2}{4} = \text{外}$$

により、答は22寸06厘2毛5糸
(22.0625寸)

★数値を変えただけで同様の問題が稲城市穴澤神社の算額第1問にある。

2. 問題を解くための準備



△ABCの外接円の半径をR、内接円の半径をr、各辺の midpoint から外接円までの距離(これを矢という)をそれぞれa', b', c'とする。

また、外接円とAB, BCに内接する円の中心をO', 半径をrhoとする。

このときに成り立つ関係式を証明する。

$$\textcircled{1} \quad r = \rho \cos^2 \frac{B}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad b' = 2R \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad 2a'b'c' = r^2 R$$

$$\textcircled{4} \quad a' + b' + c' = 2R - r$$

②～④は前回証明済み。

【①の証明】

$$\triangle O'IE \text{ で, } IE = \rho \cos \frac{B}{2}$$

$$\triangle IDE \text{ で, } r = IE \cos \frac{B}{2}$$

したがって、 $r = \rho \cos^2 \frac{B}{2}$

3. 問題の解法

算額の図と2の図を比較すると、甲 $=a'=4$ 寸、乙 $=2\rho=13$ 寸、丙 $=c'=8$ 寸4分5厘のとき、外 $=2R$ を求めればよいことになる。

2の①、②を合わせて \sin 、 \cos を消去すると、

$$\rho b' + 2rR = 2\rho R$$

$$b' = \frac{2R(\rho - r)}{\rho} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} \text{より、} b' = \frac{r^2 R}{2a'c'} \quad \dots \textcircled{6}$$

⑥を⑤に代入して b' を消去すると、

$$\frac{r^2 R}{2a'c'} = \frac{2R(\rho - r)}{\rho}$$

$$\rho r^2 + 4a'c'r - 4a'c'\rho = 0$$

解の公式を利用して、正の解を求めると、

$$r = \frac{\sqrt{4a'^2c'^2 + 4a'c'\rho^2} - 2a'c'}{\rho}$$

r の逆数を作り、分母を有理化すると、

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{4a'^2c'^2 + 4a'c'\rho^2} + 2a'c'}{4a'c'\rho} = \frac{\sqrt{\frac{4\rho^2}{a'c'} + 4} + 2}{4\rho} \quad \dots \textcircled{7}$$

また、⑤を④に代入して b' を消去すると、

$$2R = \frac{\rho}{r}(a' + c') + \rho \quad \dots \textcircled{8}$$

⑦を⑧に代入すると、

$$2R = \rho \times \frac{\sqrt{\frac{4\rho^2}{a'c'} + 4} + 2}{4\rho} \times (a' + c') + \rho$$

$$2R = \frac{\left[\sqrt{\frac{4\rho^2}{a'c'} + 4} + 2 \right] (a' + c') + 4\rho}{4} = \frac{\left[\sqrt{\frac{\text{乙}^2}{\text{甲} \times \text{丙}} + 4} + 2 \right] (\text{甲} + \text{丙}) + \text{乙} \times 2}{4} = \text{外}$$

したがって、術文と同じ形になる。

実際に数値を代入して計算すると、 $2R = 22.0625$ となる。