２０１１年８月

早数教分科会レポート

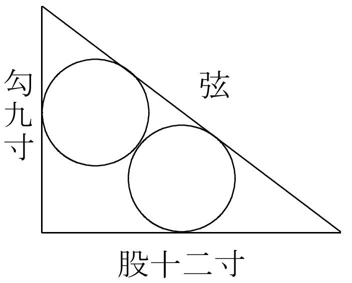
和算小説「天地明察」より

柏葉中学校
永井信一

１．はじめに

「天地明察」(2009 年)とは冲方丁（うぶかた　とう）による和算に関連した時代小説で，囲碁師・暦学者・和算家であった渋川春海（本名・安井算哲）が主人公の物語である。第 31 回吉川英治文学新人賞，第 7 回本屋大賞を受賞し，第 143 回直木賞の候補となった。2012 年秋には映画版が公開予定である。

この小説の冒頭に，下に示すような村瀬義益によって金王八幡神社に奉納された算額が紹介され，主人公が解答を誤り，若き日の関孝和が正しく解答する場面が描かれている。



今勾股弦釣九寸股壱弐寸在　内ニ如図等円双ツ入ル　円径ヲ問

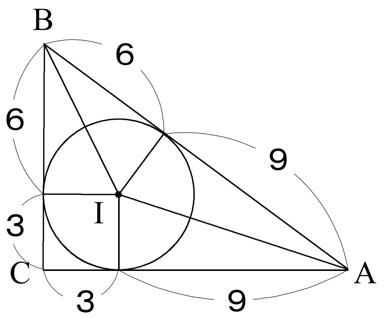
術曰く　　まず勾股を相乗し，これを二段（二倍）。
さらに勾股弦の総和にて除，これに弦を乗し，
また勾股の総和にて除

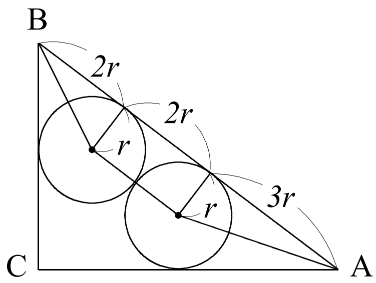
答曰く　七分の三十寸　　　（円径は直径のことである）

問題のレベルとしては，高校入試問題程度と考えられる。この問題を元に中学校の教材開発を試みた。

２．中学生の解法例

【解法１】　内接円の半径と相似を利用する

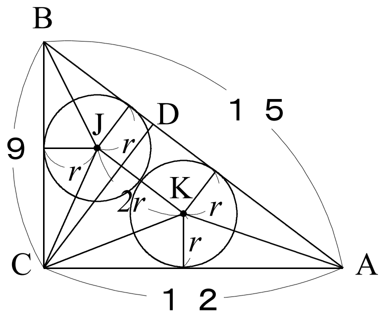




△ ABC の内接円の半径は３

2r ＋ 2r ＋ 3r ＝ 15　より　$r=\dfrac{15}{7}$　したがって，$2r=\dfrac{30}{7}$

【解法２】　三角形の面積を利用する



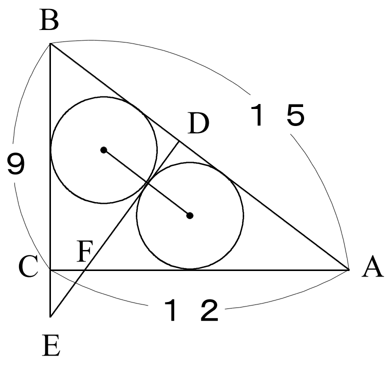
C から AB に垂線を引く。 CD=$\dfrac{36}{5}$

△ KAC ＋△ JCK ＋△ JBC ＋台形 ABJK ＝△ ABC

$$6r+\left(\frac{36}{5}-r\right)r+\frac{9}{2}r+\frac{(2r+15)r}{2}=54$$

$\dfrac{126}{5}r=54$　より，$2r=\dfrac{30}{7}$

【解法３】　内接円の半径と合同と相似を利用する



図のように補助線を引く。

△ AFD ≡△ EBD　　　　　△ AFD ∽△ ABC

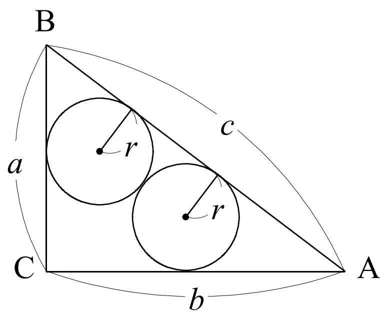
AB ＝ AD ＋ DB ＝ AD ＋ DF

相似比は　（AD+DF）:（AC+CB）＝ AB :（AC+CB）

＝１５ :（１２＋９）＝５ : ７

△ ABC の内接円の直径は 6 だから，$2r=6\times\frac{5}{7}=\frac{30}{7}$

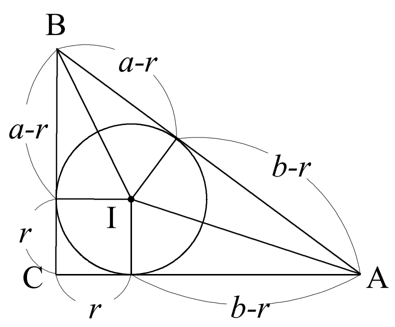
３．算額の解法の考察



小説中に出てくる術文（解法）を左の図に合わせて現代風の表記にすると，次のようになる。

$$2r=\frac{2ab}{a+b+c}\times\frac{c}{a+b}$$

この式の意味を考察する。

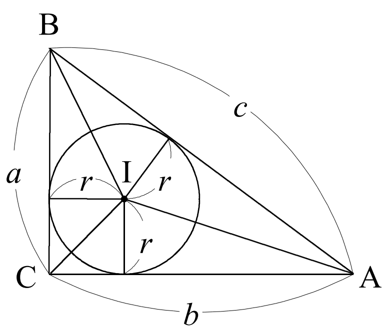


【解法 1】のように辺の長さを利用した場合

$(a-r)+(b-r)=c$

より，内接円の直径は

$2r=a+b-c$　　　・・・①



【解法２】のように三角形の面積を利用した場合

△ IAB ＋△ IBC ＋△ ICA ＝△ ABC

$$\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{ab}{2}$$

より，内接円の直径は

$2r=\frac{2ab}{a+b+c}$　　　・・・②

術文の前半部分は，内接円の直径であることがわかる。

ここで，内接円の直径①と②は表現の違いだけで等しいことを示す。

$a^2+b^2=c^2$　だから，　$a+b-c-\frac{2ab}{a+b+c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b+c}=0$

一般の三角形では，内接円の直径は，

$$2r=\frac{4\triangle \mathrm{ABC}}{a+b+c} \quad \cdots ③$$

①，②，③ともに和算ではよく知られた式である。

【解法３】で示したように，△ AFD ∽△ ABC　であり，

相似比は，　（AD+DF）:（AC+CB） ＝ AB :（AC+CB） ＝ c :（a ＋ b）

したがって，術文は　△ ABC の内接円の直径に相似比をかけたものと解釈することができる。

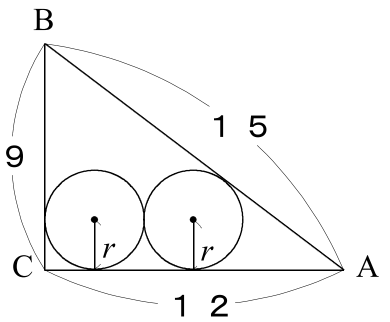
小説中の問題なので余りこだわるのも無意味なのかもしれないが，内接円の直径の式は①の方が簡単なのに②を使っているのはなぜか。（和算では術文が簡単な方が良い解答とされる。）

また，答が整数値ではないのに公約数３があるのは不自然とも言える。

小説の参考文献（「算額道場」佐藤健一編）にある元になったと思われる算額（岡山県熊山町八幡和気神社）は，３・４・５の直角三角形になっている。術文はほぼ同じ。

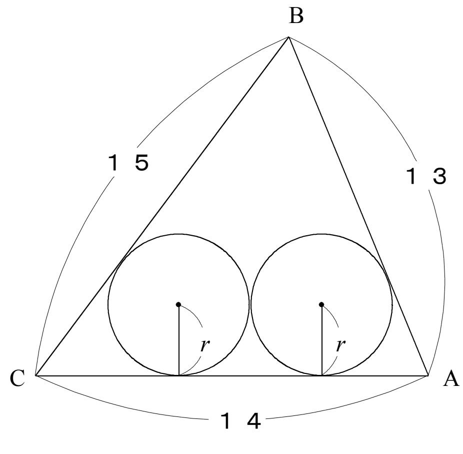
３．教材作成

【問題１】円の入れ方を変える



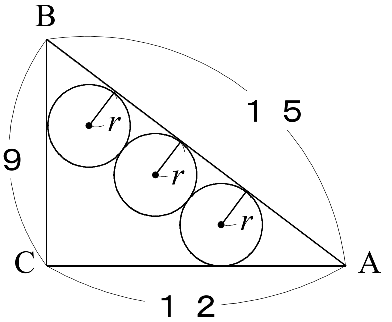
$r=2$

【問題２】三角形の形を変える



$r=\frac{28}{11}$

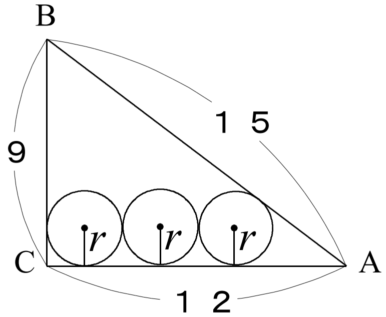
【問題３】円の個数を変える



$r=\frac{5}{3}$

円の個数 n 個のとき　$r=\frac{15}{2n+3}$

【問題４】　入れ方を変え，個数を変える



$r=\frac{3}{2}$

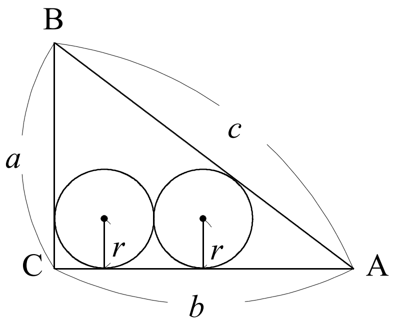
円の個数 n 個のとき　$r=\frac{6}{n+1}$

三角関数を使えば，直角三角形の辺の長さを簡単に一般化することができる。

$$\tan\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\mathrm{A}}{1+\cos\mathrm{A}}}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{b}{c}}{1+\dfrac{b}{c}}}=\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}=\sqrt{\frac{c^2-b^2}{(c+b)^2}}=\frac{a}{b+c}$$

を利用する。

【問題５】　問題１の一般化

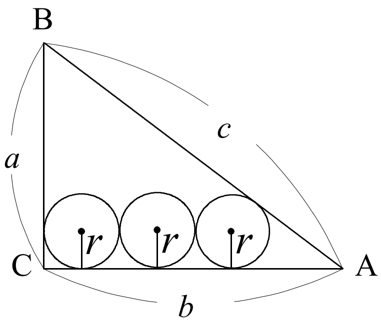


$$\tan\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{r}{b-3r}$$　より

$$r=\frac{ab}{3a+b+c}$$

←式②との関係も興味深い→

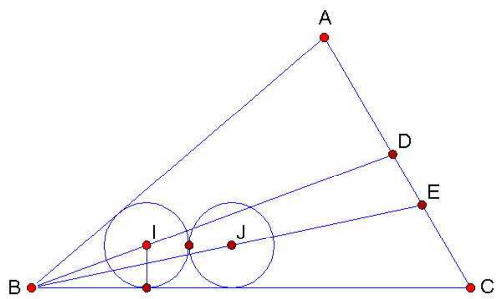
【問題６】　問題４の一般化



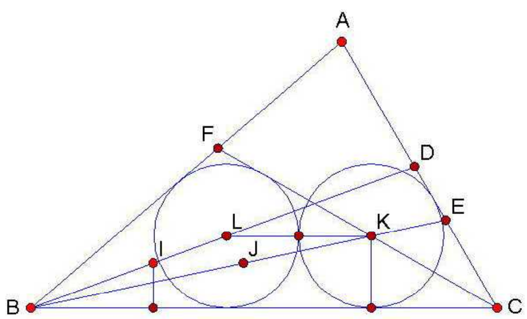
$$\tan\frac{\mathrm{A}}{2}=\frac{r}{b-5r}$$　より

$$r=\frac{ab}{5a+b+c}$$

４．三角形に内接する２つの等円の作図方法



∠Ｂの二等分線 BD を引く。
２辺 AB，BC に接する円 I を描く。
円 I と等しい半径で円 I と辺 BC に接する円 J を描く。
J を通るように BE を引く。



∠Ｃの二等分線 CF を引き，
BE との交点を K とする。
２辺 AC，BC に接する円 K を描く。
K を通り辺 BC に平行な直線と BD との交点を L とする。円 L を描く。

点 B を中心とした相似拡大を利用する。図はシンデレラを使用。

５．おわりに

天地明察はベストセラーになったが，一方で数学や囲碁の説明の部分で内容の誤りが指摘されている。今回取り上げた問題は誤りもなく，中学生にとっても扱いやすく発展性もあると考え考察してみた。特に作図方法は，なかなか気づかなかった。